Ejercicios de Análisis Complejo
Relación 5. Integrales de línea

Ejercicio 1. Calcula $\displaystyle\int_\gamma \overline{z}\,\mathrm{dz}$ siendo $\gamma\colon [0,2]\to\mathbb{R}$ el camino dado por:

$$\textbf{a)}\ \gamma(t)=t^2+it\,;\quad \textbf{b)}\ \gamma(t)=2t+it\,;\quad \textbf{c)}\ \gamma(t)=\begin{cases} 2it & 0\le t\le 1\\ 2i+4(t-1) & 1\le t\le 2\end{cases}$$

Ejercicio 2. Calcula $\displaystyle\int_\gamma \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{dz}$ siendo $\gamma\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ el camino dado por:

$$\textbf{a)}\ \gamma(t)=t+it\,;\quad \textbf{b)}\ \gamma(t)=\exp(2\pi it)$$

Ejercicio 3. Calcula las integrales

$$\textbf{a)}\ \int_{[i,1+i,3+3i]} z^2\,\mathrm{dz}\quad \textbf{b)}\ \int_{C(0,1)}\frac{1}{\sqrt[n]{z}}\,\mathrm{dz}\quad \textbf{c)}\ \int_{C(0,1)}\log z\,\mathrm{dz}\quad \textbf{d)}\ \int_{C(0,1)} z^\alpha\log z\,\mathrm{dz}\quad (\alpha\in\mathbb{C})$$

Ejercicio 4. Calcula $\displaystyle\int_\gamma |z|\overline{z}\,\mathrm{dz}$ siendo γ el camino formado por la mitad superior de la circunferencia unidad y el segmento $[-1,1]$.

Ejercicio 5. Sea $\gamma\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ un camino y $\overline{\gamma}$ el camino conjugado de γ. Prueba que:

$$\overline{\int_\gamma f(z)\,\mathrm{dz}} = \int_{\overline{\gamma}}\overline{f(\overline{z})}\,\mathrm{dz}\qquad (\forall f\in\mathcal{C}(\gamma^*))$$

Deduce que si f es continua en la circunferencia unidad:

$$\overline{\int_{C(0,1)} f(z)\,\mathrm{dz}} = -\int_{C(0,1)}\overline{f(z)}\,\frac{\mathrm{dz}}{z^2}$$

Ejercicio 6. Calcula $\displaystyle\int_{C(a,R)} P(z)\,\overline{\mathrm{dz}}$ donde $P(z)$ es una función polinómica no constante.

Ejercicio 7. Sea $\Omega\subset\mathbb{C}$ abierto, $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ y γ un camino cerrado en Ω. Prueba que el número $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\overline{f'(z)\,\mathrm{dz}}$ es imaginario puro.

Ejercicio 8. Sea $A_r=\{z\in\mathbb{C}: 0<|z-a|\le r,\ \alpha\le\arg(z-a)\le\beta\}$ $(-\pi\le\alpha<\beta\le\pi)$. Supongamos que f es continua en A_r y que $\displaystyle\lim_{\substack{z\to a\\ z\in A_r}}(z-a)f(z)=L\in\mathbb{C}$. Pongamos para $\alpha\le t\le\beta$, $\gamma_r(t)=a+r\,\mathrm{e}^{it}$. Prueba que

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} f(z)\,\mathrm{dz}=i(\beta-\alpha)L$$

Ejercicio 9. Sea f continua en el semiplano superior y tal que $\lim\limits_{\substack{z\to\infty \\ \operatorname{Im} z\geqslant 0}} f(z)=0$. Prueba que si $\lambda>0$ y Γ_R es la semicircunferencia de centro 0 y radio R contenida en el semiplano superior, entonces

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R} \mathrm{e}^{i\lambda z} f(z)\,\mathrm{d}z=0$$

Ejercicio 10. Sea $a\in\mathbb{C}$ y f una función continua en $\{z\in\mathbb{C} : r\leq |z-a|\leq R\}$ donde $0<r<R$. Sea $\{r_n\}\to R$ con $r<r_n<R$. Prueba que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{C(a,r_n)} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C(a,R)} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Ejercicio 11. Prueba que para $0<r<1$, se tiene que $\displaystyle\int_{C(0,r)}\frac{\log(1+z)}{z}\,\mathrm{d}z=0$. Deduce que

$$\int_0^{2\pi}\log(1+r^2+2r\cos\vartheta)\,d\vartheta=0$$

Ejercicio 12. Sea f holomorfa en un abierto $\Omega\subset\mathbb{C}$ y verificando que $|f(z)-1|<1\ \ \forall z\in\Omega$. Justifica que $\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z=0$ para todo camino cerrado γ en Ω.

Ejercicio 13. Integrando la función $h\colon\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ dada por:

$$h(z)=\frac{\mathrm{e}^{iz}-1}{z}\ \ \forall z\in\mathbb{C}^*,\ h(0)=i$$

a lo largo del camino formado por la yuxtaposición del segmento $[-r,r]$ y de la semicircunferencia γ_r de centro 0 y radio r contenida en el semiplano superior, deduce que para todo $r>0$ se verifica que:

$$\left|\int_{-r}^{r}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx-\pi\right|<\frac{\pi}{r}$$

Ejercicio 14. Sean $\Omega=\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$ y $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$, $\forall z\in\Omega$. Justifica que f no admite una primitiva en Ω.

Ejercicio 15. **Integrales de Cauchy.** Sea γ un camino en $\mathbb{C}$ y $\varphi\colon\gamma^*\to\mathbb{R}$ una función continua. Prueba que la función $f\colon\mathbb{C}\setminus\gamma^*\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(z)=\int_\gamma\frac{\varphi(w)}{w-z}\,dw\quad\forall z\in\mathbb{C}\setminus\gamma^*$$

es analítica y sus derivadas vienen dadas por:

$$\frac{f^{(k)}(z)}{k!}=\int_\gamma\frac{\varphi(w)}{(w-z)^{k+1}}\,dw\quad\forall z\in\mathbb{C}\setminus\gamma^*,\ \ \forall k\in\mathbb{N}.$$

Ejercicios de Análisis Complejo
Relación 6. Fórmula de Cauchy. Teorema de Taylor

Ejercicio 1. Calcula $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$ donde $\gamma(t)=\cos t+\frac{i}{2}\operatorname{sen} t,\ \ \forall t\in[-\pi,\pi]$.

Ejercicio 2. Sea $\gamma=C(a,r)$ y $b,c\in\mathbb{C}\setminus\gamma^*$. Calcula todos los posibles valores de $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z-b)(z-c)}$ dependiendo de la posición relativa de los puntos b y c respecto de la circunferencia γ.

Ejercicio 3. Calcula la integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z}{z^3+z}$ para $\gamma=C(0,2),\ \gamma=C(0,1/2),\ \gamma=C(i/2,1)$.

Ejercicio 4. Calcula la integral $\displaystyle\int_{C(0,r)} \frac{z+1}{z(z^2+4)}\,dz$ donde $r>0$, $r\neq 2$.

Ejercicio 5. Calcula $\displaystyle\int_{C(2+i,\sqrt{2})} \frac{e^z\cos z}{(1+z^2)\operatorname{sen} z}\,dz$.

Ejercicio 6. Sea f una función entera, $a,b\in\mathbb{C}$ con $a\neq b$ y $R>\max\{|a|,|b|\}$. Prueba que

$$\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\,dz = 2\pi i\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Deduce que toda función entera y acotada es constante.

Ejercicio 7. Sea f una función holomorfa en un disco de centro cero y radio $R>1$. Calcula

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,1)} \frac{\overline{f(w)}}{w-z}\,dw \qquad (z\in\mathbb{C},\ |z|\neq 1)$$

Ejercicio 8. **Desarrollo limitado de Taylor.** Sea f una función holomorfa en un abierto que contenga a $\overline{D}(a,r)$. Prueba que para todo $z\in D(a,r)$ y todo $n\in\mathbb{N}$ es:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k+\frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi i}\int_{C(0,r)}\frac{f(w)}{(w-z)(w-a)^{n+1}}\,dz$$

Ejercicio 9. (**Serie binomial**). Sea $a\in\mathbb{C}^*$. Justifica que

$$(1+z)^a=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}z^n \qquad (|z|<1)$$

Ejercicio 10. Obtener el desarrollo en serie de potencias centrado en el origen de la función f, y calcular el radio de convergencia de la serie resultante en cada uno de los siguientes casos:

a) $f(z)=\dfrac{z^2}{(z+1)^2}$ **b)** $f(z)=\cos^2(z)$ **c)** $f(z)=\operatorname{arc\,tg} z$

d) $f(z)=\operatorname{arc\,sen} z$ **e)** $f(z)=\log(1+\sqrt{1+z^2})$

Ejercicio 11. Sean $a,b\in\mathbb{C}$, $a\neq b$. Definamos $f(z)=\log\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$ para todo $z\in\mathbb{C}\setminus\{a,b\}$.

a) Justifica que f es una función holomorfa en $\Omega=\mathbb{C}\setminus[a,b]^*$.

b) Justifica que para todo camino cerrado γ en Ω se verifica que

$$\int_\gamma \frac{1}{z-a}\,\mathrm{dz} = \int_\gamma \frac{1}{z-b}\,\mathrm{dz}$$

c) Si $a=i, b=1$, calcula la serie de Taylor de f en $z=0$. Calcula el radio de convergencia de dicha serie e indica dónde su suma es igual a f.

Ejercicio 12. Prueba que los coeficientes c_n de la serie de Taylor de $f(z)=\dfrac{1}{1-z-z^2}$ centrada en $z=0$ satisfacen las igualdades: $c_0=c_1=1$, $c_{n+2}=c_{n+1}+c_n$ para todo $n\geq 0$. Calcula dichos coeficientes de forma explícita descomponiendo la fracción dada en fracciones simples. Calcula el radio de convergencia de la serie $\sum\limits_{n\geq 0} c_n z^n$. La sucesión $\{c_n\}$ se llama sucesión de Fibonacci.

Ejercicio 13. En cada uno de los siguientes casos, determinar si hay una función $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ tal que para todo $n\in\mathbb{N}$ se tenga que $f^{(n)}(0)=a_n$. En caso afirmativo, encontrar todas las funciones f que verifiquen las condiciones pedidas.

a) $\Omega=\mathbb{C} \quad a_n=n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

b) $\Omega=\mathbb{C} \quad a_n=(n+1)! \quad \forall n\in\mathbb{N}$

c) $\Omega=D(0,1) \quad a_n=2^n n! \quad \forall n\in\mathbb{N}$

d) $\Omega=D(0,\frac{1}{2}) \quad a_n=n^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Ejercicio 14. Para $z\neq -1$ sea $f(z)=\dfrac{1}{z}\left(e^{-z}-\dfrac{1}{1+z}\right)$ y $f(0)=0$.

a) Justifica que f es holomorfa en el abierto $\mathbb{C}\setminus\{-1\}$.

b) Integra dicha función a lo largo de la frontera de la parte del disco $D(0,R)$ que queda en el primer cuadrante para calcular el valor de la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$

Ejercicios de Análisis Complejo
Relación 7. Desigualdades de Cauchy.
Teorema de Liouville. Sucesiones de funciones holomorfas

Ejercicio 1. Sea f una función entera verificando:

$$f(z)=f(z+1)=f(z+i) \quad \forall z\in\mathbb{C}.$$

Prueba que f es constante.

Ejercicio 2. Sea f una función entera tal que:

$$|f(z)|\leq A+B|z|^{\alpha} \;\; \forall z\in\mathbb{C} \text{ con } |z|\geq M$$

donde A,B,α,M son constantes no negativas. Pruébese que f es una función polinómica.

Ejercicio 3. Sea $f\in H(D(0,1))$ tal que $|f(z)|\leqslant \dfrac{1}{1-|z|}$ $(|z|<1)$. Prueba que para todo $n\in\mathbb{N}$ se verifica que $|f^{(n)}(0)|\leqslant \mathrm{e}(n+1)!$.

Ejercicio 4. Calcula la integral $\displaystyle\int_{\gamma}\frac{\mathrm{e}^{z}\,\mathrm{d}z}{z(1-z)^{3}}$ para $\gamma=C(1/4,1/2),\ \gamma=C(1,1/2),\ \gamma=C(2,3)$.

Ejercicio 5. Calcula la integral $\displaystyle\int_{\gamma}\frac{\cos z}{z^{2}(z-1)}$ para $\gamma=C(0,1/3),\ \gamma=C(1,1/3),\ \gamma=C(0,2)$.

Ejercicio 6. Calcula $\displaystyle\int_{C(0,1)}\frac{\operatorname{sen}(2z)}{(z-\pi/4)^{2}(z^{2}+9)}\,\mathrm{d}z$.

Ejercicio 7. Calcula $\displaystyle\int_{C(0,r)}\frac{dw}{(w-a)(w-b)^{m}}$ donde $m\in\mathbb{N}$ y $|b|<r<|a|$.

Ejercicio 8. Dado $n\in\mathbb{N}$, calcula las siguientes integrales:

$$\int_{C(0,1)}\frac{\operatorname{sen} z}{z^{n}}\,\mathrm{d}z\,; \quad \int_{C(0,1)}\frac{\mathrm{e}^{z}-\mathrm{e}^{-z}}{z^{n}}\,\mathrm{d}z\,; \quad \int_{C(1,\frac{1}{2})}\frac{\log z}{z^{n}}\,\mathrm{d}z$$

Ejercicio 9. Se considera la sucesión de funciones dada por $f_n(z)=\dfrac{1}{n}\operatorname{sen}(nz)$. Justifica que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ pero no converge uniformemente en ningún subconjunto abierto de $\mathbb{C}$.

Ejercicio 10. Probar que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{z^{n}}{1-z^{n}}$ converge en $D(0,1)$ y que su suma es una función holomorfa.

Ejercicio 11. Sea f una función entera. Para $r > 1$ se define

$$\lambda(r) = \frac{\log M(r)}{\log r}$$

donde $M(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$. Demuestra que f es una función polinómica si, y sólo si, λ tiene límite finito en $+\infty$.

Ejercicio 12. Sean f y g dos funciones enteras no constantes verificando que $|f(z)| \leq |g(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$. ¿Qué se puede afirmar sobre f y g?.

Ejercicio 13. Prueba que la serie

$$1 + \sum_{n\geq 0} \frac{z^2(z^2+1)(z^2+2^2)\cdots(z^2+n^2)}{[(n+1)!]^2}$$

es convergente para todo z y su suma es una función entera.

Ejercicio 14. Sea $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ una serie de funciones holomorfas en el disco $D(0,1)$ que converge uniformemente en conjuntos compactos. Sea

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{n,k} z^k \qquad (|z| < 1)$$

Justifica que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_{n,k} z^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_{n,k}\right) z^k \qquad (|z| < 1)$$